Случайные величины

Распределение вероятностей для дискретной случайной величины

Случайная величина — переменная, которая хранит исход некоторого случайного эксперимента в виде числа. В результате эксперимента случайная величина может принимать только одно значение.

Таблица распределения случайной дискретной величины — это таблица, которая хранит все значения, которые может принимать случайная величина, и вероятности, с которыми она эти значения принимает.

Пример:

пусть случайная величина X: «Корм, который выбрал кот», тогда

- Исход «Кот выбрал корм с лососем» кодируем значением X=1.
- Исход «Кот выбрал корм с селёдкой» кодируем значением X=2.

Тогда для этой случайной величины таблица распределения может выглядеть следующим образом:

Значение случайной величины (Номер корма, который выбрал кот)	1 (Корм с лососем)	2 (Корм с селёдкой)
Вероятность этого значения	0.4	0.6

Вероятность попасть в промежуток для дискретной случайной величины

Чтобы вычислить вероятность того, что случайная величина примет значения из промежутка $[a, b]$, необходимо сложить все вероятности величин, которые может принимать случайная величина и которые лежат в промежутке $[a, b]$.

Пример:

пусть случайная величина X: «Корм, который выбрал кот», тогда если таблица распределения случайной величины X выглядит следующим образом:

Значение случайной величины (Номер корма, который выбрал кот)	1 (Корм с лососем)	2 (Корм с селёдкой)	3 (Корм с креветкой)	4 (Корм с бараниной)
Вероятность этого значения	0.2	0.5	0.2	0.1

То вероятность того, что случайная величина X лежит в промежутке [2, 4] будет равна: $P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.8$

Кумулятивная функция для дискретной случайной величины

Кумулятивной функцией вероятности называется функция $F(x)$, которая в каждой точке показывает вероятность того, что $P(X \leqslant x)$.

Свойства кумулятивной функции:

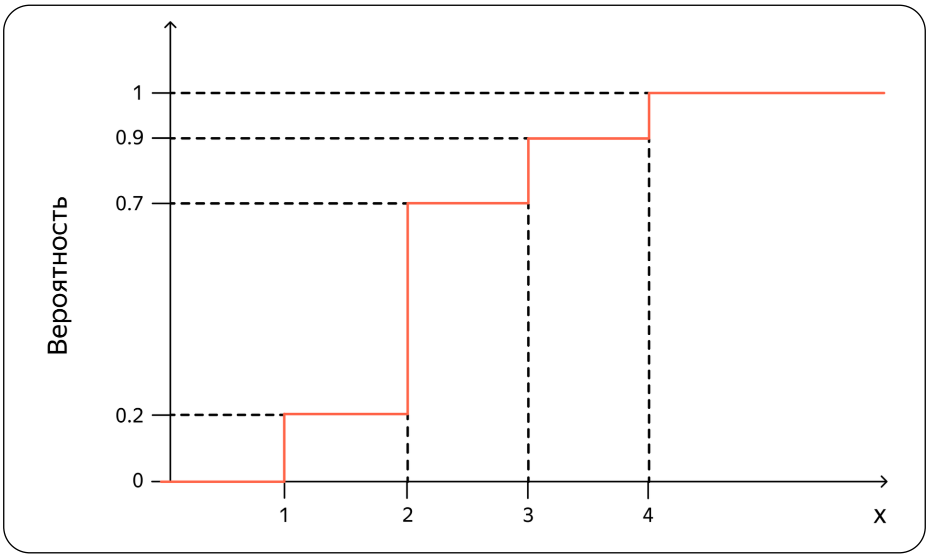
- Кумулятивная функция не убывает. Она может либо не изменяться, либо возрастать.
- Кумулятивная функция начинается из 0.
- Кумулятивная функция приходит в 1.

Пример:

кумулятивная функция для дискретной случайной величины X из прошлого примера будет выглядеть как:

$$F(1) = P(X \leqslant 1) = P(X \leqslant 0) + P(X = 1) = 0 + 0.2 = 0.2;$$
$$F(2) = P(X \leqslant 2) = P(X \leqslant 1) + P(X = 2) = 0.2 + 0.5 = 0.7;$$
$$F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X \leqslant 2) + P(X = 3) = 0.7 + 0.2 = 0.9;$$
$$F(4) = P(X \leqslant 4) = P(X \leqslant 3) + P(X = 4) = 0.9 + 0.1 = 1;$$

А график этой функции будет выглядеть как:



Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическое ожидание случайной величины X равно:

$$\boxed{\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) x_i,}$$

Случайные величины

где

- $\sum_{i=0}^{n}$ — это сумма всех значений с индексами от 0 до n;
- x_i — это значение, которое может принимать случайная величина;
- $P(X = x_i)$ — вероятность, с которой случайная величина принимает это значение.

Математическое ожидание позволяет понять, какое значение можно в среднем ожидать от случайной величины.

Пример:

Для случайной величины X из прошлого примера математическое ожидание будет равно:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot x_i = P(X = 1) \cdot 1 + P(X = 2) \cdot 2 + P(X = 3) \cdot 3 +$$
$$+ P(X = 4) \cdot 4 = 0.2 \cdot 1 + 0.5 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 = 2.2.$$

Дисперсия дискретной случайной величины

Дисперсия дискретной случайной величины X равна:

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E}[X])^2 \cdot P(X = x_i)$$

или

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \sum_{i=0}^{n} (x_i - \mathrm{E}[X])^2 \cdot P(X = x_i)$$

где

- $\sum_{i=0}^{n}$ — сумма значений;
- x_i — это значение, которое может принимать случайная величина;
- $P(X = x_i)$— вероятность, с которой случайная величина принимает это значение;
- $\mathrm{E}[X]$— это математическое ожидание случайной величины X.

Дисперсия помогает понять, насколько сильно значения разбросаны вокруг математического ожидания.

Глоссарий

Промежутки бывают трех видов:

- **Интервалы**. Интервал от a до b обозначается (a, b). В него входят все числа от a до b, не включая самих a и b.
- **Отрезки**. Отрезок от a до b обозначается [a, b]. Он содержит все числа от a до b, включая a и b.
- **Полуинтервалы**. Полуинтервал от a до b может обозначаться по-разному. Полуинтервал [a, b) содержит все числа от a до b, включая a, но не включая b. А полуинтервал (a, b] включает все числа от a до b, включая b, но не включая a.